

Chapitre 1

Théorie Rigoureuse des Ondes Couplées (RCWT : Rigorous Coupled Wave Theory)

Ce chapitre concerne la réalisation d'un outil mathématique performant capable de prédire et d'analyser le comportement des structures résonnantes qui seront étudiées dans cette thèse. Cet outil est basé sur la théorie rigoureuse des ondes couplées [1]. Au HOLOLAB¹, plusieurs générations de chercheurs se sont employés à implémenter cette résolution numérique des équations de Maxwell de manière à rendre compte du comportement de divers types de réseaux de diffraction. Mon travail s'inscrit dans cette lignée puisque c'est à partir des algorithmes écrits par mon prédécesseur, le Dr. V. Moreau, que j'ai développé une nouvelle version du programme. Celle-ci permet entre autre, le traitement de structures multicouches, chaque couche pouvant présenter une modulation périodique de sa permittivité et un comportement non-linéaire du 3ème ordre. Ce nouveau programme permet également d'obtenir une visualisation de la distribution du champ électromagnétique à l'intérieur des structures étudiées.

¹HOLOLAB est la dénomination du laboratoire d'holographie de l'université de Liège, fondé et dirigé par le Dr. Renotte. Il dépend du département de Physique et plus particulièrement, du service de Physique Générale du Pr. Lion.

1.1 Introduction [2]

Au milieu du 17^{ème} Siècle, le modèle intuitif de propagation rectiligne de la lumière, connu aussi sous le nom d'optique géométrique, est mis en défaut par le jésuite italien Francesco Grimaldi (1618 - 1663). Pour vérifier si la lumière se propage effectivement en ligne droite, ce dernier fait passer un faisceau lumineux à travers une petite ouverture percée dans un écran. Il obtient ainsi un mince pinceau de lumière qu'il envoie contre un objet mince (p.ex. un cheveu). Sur un écran, derrière l'objet, l'ombre de celui-ci apparaît plus large que ce que l'optique géométrique pouvait prédire. De plus, cette ombre floue se trouve limitée par une série de franges colorées. Grimaldi appelle ce phénomène "**diffraction** de la lumière" qui est défini ultérieurement par Sommerfeld (1868 - 1951) comme "toute déviation de rayons lumineux qui ne résulte ni d'une réflexion, ni d'une réfraction" et qui trouve son explication dans la nature ondulatoire de la lumière.

La théorie ondulatoire de la diffraction est approchée intuitivement par Huygens (1629 - 1695) en 1678, complétée analytiquement par Fresnel (1788 - 1827) et Kirchhoff (1824 - 1887) et reformulée par Sommerfeld et Rayleigh (1842 - 1919) à la fin du 19^{ème} siècle. Ces approches traitent la propagation de la lumière comme un phénomène scalaire et par conséquent néglige sa nature électromagnétique. Le champ électromagnétique doit être caractérisé par ses deux composantes vectorielles, les champs électrique et magnétique, couplées par les équations de Maxwell (1831 - 1879). L'approche scalaire considère uniquement une composante transverse du champ électromagnétique.

Toutefois, cette approximation est suffisante sous trois conditions :

- 1) si la taille de l'objet diffractant est grande comparée à la longueur d'onde de la lumière diffractée.
- 2) si la distance d'observation des figures de diffraction est suffisamment grande (cf. ci-dessous).
- 3) si les angles d'incidence et de diffraction sont suffisamment faibles pour pouvoir négliger la composante axiale du champ.

Deux approximations de la théorie scalaire de la diffraction sont largement utilisées : l'approximation de Fresnel qui décrit la figure de diffraction au-delà de la distance de Fresnel, à partir de laquelle le front d'onde peut être considéré

comme parabolique ($R \geq a^2/\lambda$ où R est la distance de l'écran d'observation à l'ouverture diffractante, a le diamètre de l'ouverture et λ la longueur d'onde dans le vide) et l'approximation de Fraunhofer (1787 - 1826), qui suppose que le front d'onde est plan et, par conséquent que la distance entre l'ouverture et l'écran est infinie.

A l'origine, le phénomène de diffraction de la lumière était considéré comme une limitation des performances des systèmes optiques. Toutefois, l'exploitation de ce phénomène s'est développée pendant deux siècles sous la forme de l'étude et de l'utilisation des réseaux de diffraction, des éléments qui modulent périodiquement le front d'onde incident. Leur intérêt réside dans les caractéristiques du champ diffracté : un réseau idéal génère un ensemble d'ondes appelé ordres de diffraction qui se propagent dans des directions discrètes. Les angles formés par les différents ordres de diffractions avec la normale au réseau, θ_m , sont donnés par l'équation des réseaux,

$$\sin \theta_m = \sin \theta_i + \frac{m\lambda}{\Lambda}$$

où θ_i est l'angle d'incidence, λ la longueur d'onde de la lumière dans l'air, m est l'ordre diffracté et Λ est la période du réseau. L'utilisation des réseaux de diffraction en spectroscopie est motivée par leur sélectivité spectrale et leur aptitude à décomposer la lumière incidente.

En 1902, Wood (1868 - 1955) observe de brutales variations de la distribution de l'éclairement dans les spectres transmis et réfléchi de la lumière blanche diffractée par un réseau métallisé [3]. Là où un spectre continu était attendu, il observe des maxima et des minima dans le flux de lumière diffractée qui ne s'expliquent pas dans le cadre des théories scalaires de la diffraction. Ces effets, appelés "anomalies de Wood", sont en partie expliqués par Rayleigh qui suggère qu'ils sont associés à l'apparition ou à la disparition d'ordres de diffraction [4]. Un autre type d'anomalies sont les anomalies de résonance qui peuvent survenir lors de la diffraction par des réseaux métalliques ou diélectriques. Une propriété importante de ces anomalies est leur dépendance vis à vis de la polarisation. Il est par conséquent nécessaire de considérer la nature électromagnétique du phénomène de diffraction afin de les étudier et de les prédire [5, 6].

Afin d'expliquer les phénomènes de résonance, Lord Rayleigh tente le premier de résoudre le traitement du processus de diffraction par voie électromagnétique, en 1907 [4]. Il suggère d'exprimer le champ électromagnétique, tant en dehors qu'au sein de la région modulée, via un développement en série d'ondes planes. Même si le développement de Rayleigh est toujours utilisé pour décrire la propagation du champ électromagnétique en dehors du réseau, il n'est pas satisfaisant pour le traitement de certains phénomènes tels que les anomalies de résonance. De plus, l'apparition du laser et l'amélioration des techniques de fabrication des réseaux (lithographie, holographie, gravure ionique, écriture directe par faisceau laser ou électronique) ont rendu impératif le développement de théories rigoureuses et numériquement stables.

Durant les années 70, R. Petit et D. Maystre développent, au Laboratoire d'Optique Électromagnétique de Marseille, une théorie vectorielle électromagnétique [7, 8]. Cette théorie est un outil très performant pour l'analyse de la diffraction par un réseau en relief de surface. Il est important de remarquer que la théorie de Petit et Maystre est exacte en ce sens qu'elle ne recourt à aucune approximation. Elle n'est malheureusement pas aisée à mettre en oeuvre pour résoudre les multiples cas auxquels la pratique nous confronte.

En 1969, H. Kogelnik propose la théorie de l'onde couplée qui permet d'étudier la diffraction par les réseaux épais (ou en volume)[9]. Elle est souvent utilisée en optique holographique et constitue l'approche la plus commune lorsqu'on traite des problèmes de diffraction par des réseaux épais. Le principe qui sous-tend la théorie de Kogelnik est le suivant : si une onde lumineuse monochromatique tombe sur un réseau sous l'angle d'incidence de Bragg ou un angle proche de celui-ci, et si l'épaisseur du matériau est suffisamment grande ($d/\Lambda > 10$ où d est l'épaisseur du matériau et Λ est la période du réseau), seules deux composantes peuvent être considérées dans le développement du champ électrique total à l'intérieur de l'hologramme: les ordres 0 et 1 de diffraction. Les autres ordres sont suffisamment faibles et peuvent être négligés. Dès lors, en introduisant dans l'équation de Helmholtz

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\epsilon\right)\vec{E} = 0$$

l'expression du champ électrique dans le réseau, on obtient un système de deux

équations différentielles couplées qu'il est possible de résoudre en utilisant des conditions aux limites appropriées et en admettant diverses approximations dont la plus importante consiste à négliger les dérivées secondes des équations du système. Cette théorie est donc une théorie "approchée". Afin d'atteindre une formulation exacte, de nombreuses variantes de cette théorie ont été publiées. Toutefois, ce n'est qu'en 1981, suite aux travaux de Moharam et Gaylord [1] que l'on a pu disposer d'une forme rigoureuse de la théorie de l'onde couplée. Il faut noter qu'avant 1982, cette théorie n'était pas applicable aux réseaux en relief de surface.

Actuellement, on peut affirmer que les théories électromagnétiques rigoureuses permettent de résoudre les cas de diffraction produits par tous les types de réseaux. C'est-à-dire que pour chaque type de réseau connu, il existe au moins une méthode qui fournit une solution satisfaisante. Mais, bien que certaines analyses théoriques couvrent des domaines d'application plus étendus que d'autre, il n'existe pas une méthode unique capable de résoudre tous les problèmes conventionnels. Pour terminer, il faut également insister sur le fait que ces analyses ne s'appliquent qu'au problème des réseaux idéaux, c'est-à-dire la détermination des propriétés (phase, amplitude, polarisation) du champ électromagnétique diffracté par une structure parfaitement périodique, considéré dans un système de coordonnées cartésiennes.

1.2 Position du problème [1]

Nous cherchons à déterminer le comportement de la lumière lorsque celle-ci traverse un réseau de diffraction. Plus exactement, nous cherchons à déterminer quelles fractions de l'énergie incidente sont distribuées dans les différents ordres de diffraction.

Pour ce faire, nous devons considérer la nature électromagnétique de la lumière. Ainsi, le champ électromagnétique est caractérisé par deux composantes vectorielles, le champ électrique (\vec{E}) et le champ magnétique (\vec{H}), couplées par les équations de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu(\vec{r})\vec{H}(\vec{r}) \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon_r(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) + \sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \quad (1.2)$$

où μ , ϵ_r et σ sont respectivement la perméabilité magnétique, la permittivité diélectrique relative et la conductivité spécifique du réseau, et ω est la pulsation de l'onde considérée dans le vide. Dans la suite de ce travail, nous considérerons la permittivité diélectrique relative complexe $\epsilon(\vec{r})$

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_r(\vec{r}) + i\frac{\sigma(\vec{r})}{\omega} \quad (1.3)$$

Ainsi, l'équation 1.2 prend une forme symétrique à l'équation 1.1.

De façon générale, les champs électriques et magnétiques d'une onde lumineuse possèdent une composante non nulle selon chaque axe de coordonnée. Cependant, tout état de polarisation peut être décomposé en deux modes orthogonaux : le mode transverse électrique (TE), pour lequel le vecteur champ électrique (\vec{E}) est perpendiculaire au plan d'incidence, et le mode transverse magnétique (TM), pour lequel le vecteur champ magnétique (\vec{H}) est perpendiculaire au plan d'incidence.

La Fig.1.1 illustre la géométrie du traitement de la diffraction d'une onde plane par un réseau périodique à une dimension. Le milieu I ($z < 0$) est le milieu incident. Il est constitué d'un matériau diélectrique homogène caractérisé par une permittivité diélectrique réelle ϵ_I . Le milieu émergent, région III ($z > d$), peut être constitué d'un matériau (diélectrique ou métallique) présentant une permittivité complexe ϵ_{III} . Le milieu II ($0 < z < d$) constitue le réseau, d'épaisseur d ,

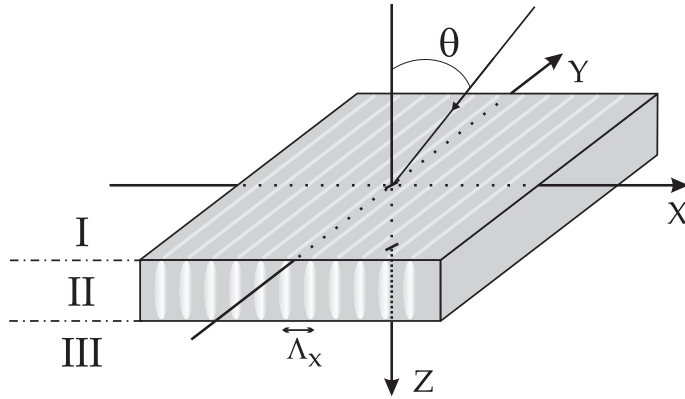


FIG. 1.1 – Géométrie générale du traitement de la diffraction par un réseau plan d'épaisseur d et de période Λ_x éclairé par une onde plane de longueur d'onde λ et sous incidence θ .

à proprement parler. Sa permittivité diélectrique peut être complexe et est modulée périodiquement selon l'axe X avec une période notée Λ_x . Dans le cas que nous traitons, la permittivité du réseau est supposée invariante selon l'axe Y. La permittivité du réseau peut dès lors être décomposée en série de Fourier.

$$\epsilon_{II}(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \epsilon_p(z) \exp(-ipK_x x) \quad (1.4)$$

où K_x est la composante selon l'axe X du vecteur du réseau, $K_x = \frac{2\pi}{\Lambda_x}$.

Une onde plane monochromatique d'amplitude unitaire, de longueur d'onde λ dans le vide et se propageant dans le milieu I dans la direction et le sens $z > 0$, rencontre l'interface séparant les milieux I et II sous l'angle θ par rapport à l'axe Z. Nous limiterons notre étude au cas d'une incidence non conique (le plan d'incidence est perpendiculaire à l'axe Y), ce qui a pour conséquence de supprimer la composante y du vecteur de l'onde incidente. En éliminant la dépendance temporelle, $\exp(i\omega t)$, l'amplitude complexe de l'onde incidente est exprimée par

$$U_0(x, z) = \exp[-i\sqrt{\epsilon_I} k(x \sin \theta + z \cos \theta)] \quad (1.5)$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est l'amplitude du vecteur d'onde dans le vide. U_0 correspond respectivement à E_y ou H_y , selon que l'on considère la composante TE ou TM de l'onde incidente.

1.2.1 Régions I et III

La combinaison des équations 1.1 et 1.2 fournit l'équation d'Helmholtz qui décrit la propagation des ondes. Dans les régions I et III, on obtient

$$(\nabla^2 + \epsilon k^2)U(x, z) = 0 \quad (1.6)$$

avec, respectivement, $\epsilon = \epsilon_I$ ou ϵ_{III} et U qui représente le champ transverse. La solution de cette équation est une intégrale d'onde plane dont seul un ensemble discret est en accord avec les conditions aux limites aux interfaces du réseau, $z = 0$ et $z = d$ (Théorème de Floquet [11]). Les champs diffractés dans les milieux I et III se réduisent à une série appelée développement de Rayleigh ².

$$U_I(x, z) = U_0(x, z) + U_R(x, z) = U_0(x, z) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m \exp[-i(\alpha_m x - r_m z)] \quad (1.7)$$

et

$$U_{III}(x, z) = U_T(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_m \exp[i(\alpha_m x + t_m(z - d))] \quad (1.8)$$

U_I et U_{III} désignent respectivement le champ total dans la région incidente et dans la région émergente. Les coefficients R_m et T_m sont les amplitudes complexes des différents ordres m de diffraction respectivement réfléchis et transmis. Le problème qui nous occupe consiste précisément à déterminer ces coefficients pour les m ordres de diffractions considérés.

$$\alpha_m = n_I k \sin \theta + mK_x \quad (1.9)$$

est la composante selon X du vecteur d'onde des ordres m transmis et réfléchis, où n_I est l'indice de réfraction du milieu incident : $n_I = \sqrt{\epsilon_I}$. La composante selon Z du vecteur d'onde des ordres transmis et réfléchis s'obtient en exprimant la condition de conservation de la longueur d'onde, λ .

$$r_m^2 = n_I^2 k^2 - \alpha_m^2 \quad \text{pour l'ordre } m \text{ réfléchi} \quad (1.10)$$

$$t_m^2 = n_{III}^2 k^2 - \alpha_m^2 \quad \text{pour l'ordre } m \text{ transmis} \quad (1.11)$$

²Le lecteur intéressé par la démonstration du théorème de Floquet-Bloch et du développement de Rayleigh se référera à l'annexe 1 de la thèse du Dr. V. Moreau [10]

où n_{III} est l'indice de réfraction du milieu émergent qui, dans le cas d'un matériau diélectrique homogène vaut $n_{III} = \sqrt{\epsilon_{III}}$, sinon $n_{III} = \sqrt{\epsilon_{III} + \kappa^2}$ où κ correspond à l'absorption du matériau. Les signes de r_m et t_m sont choisis tels que $\Re\{r_m\} + \Im\{r_m\} \geq 0$ et $\Re\{t_m\} + \Im\{t_m\} \geq 0$. Les ordres de diffraction pour lesquels r_m ou t_m prennent des valeurs réelles correspondent à des ondes planes qui se propagent respectivement dans les régions I ou III. Le rendement de diffraction dans l'ordre m transmis ou réfléchi est obtenu en calculant la projection, dans la direction Z, de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting :

$$\eta_m = \Re\left\{\frac{r_m}{r_0}\right\} |R_m|^2 \quad (1.12)$$

$$\eta_m = \Re\left\{C \frac{t_m}{t_0}\right\} |T_m|^2 \quad (1.13)$$

pour les ordres m réfléchis et transmis respectivement, avec $C = 1$ pour une onde de polarisation TE et $C = \left(\frac{n_I}{n_{III}}\right)^2$ pour une onde de polarisation TM.

1.2.2 Région II

Afin de déterminer la valeur des coefficients R_m et T_m correspondant aux ordres m de diffraction réfléchis et transmis, il faut pouvoir résoudre l'équation de propagation du champ électromagnétique de l'onde lumineuse au sein de la région II, c'est-à-dire dans le réseau. Nous avons déjà précisé que nous travaillerons en incidence non conique ainsi que dans des matériaux isotropes. Ces conditions permettent de considérer la propagation des deux modes de polarisation TE et TM de manière découplée. Ainsi, nous avons deux problèmes distincts à résoudre.

Pour la polarisation TE, le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}) = E_y(x, z)\vec{y}$ satisfait dans la région modulée, l'équation de Helmholtz,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \epsilon(x, z) \right] E_y(x, z) = 0 \quad (1.14)$$

Pour la polarisation TM, le champ magnétique $\vec{H}(\vec{r}) = H_y(x, z)\vec{y}$ satisfait également dans la région modulée, l'équation de Helmholtz,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon(x, z)} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\epsilon(x, z)} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z} \right] + k^2 H_y(x, z) = 0 \quad (1.15)$$

De manière similaire aux développements effectués pour les régions I et III, la résolution des équations 1.14 et 1.15 consiste à trouver une base de fonctions orthogonales dans laquelle projeter $\epsilon(x, z)$, $\frac{1}{\epsilon(x, z)}$ ainsi que les champs électrique et magnétique. Dans cette base, les équations de Helmholtz conduisent à un système d'équations différentielles dont la résolution se réduit à un problème de recherche des valeurs et vecteurs propres. L'expression des champs électrique et magnétique dans cette nouvelle base, suivant le développement de Rayleigh contient des coefficients homologues à T_m et R_m , obtenus pour les régions I et III, dont les valeurs peuvent être déterminées en exprimant les conditions aux limites entre les différentes régions considérées (I, II et III). La résolution de ce problème n'est pas simple et constitue le coeur de la théorie rigoureuse des ondes couplées que nous allons présenter.

Conditions aux limites

Les équations de Maxwell imposent la continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et de \vec{H} à chaque interface. Pour une onde TE, les conditions aux limites en $z = z_0$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y^-(x, z_0) = E_y^+(x, z_0) \\ \frac{\partial E_y^-(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \frac{\partial E_y^+(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \end{array} \right. \quad (1.16)$$

où les exposants + et - désignent la valeur limite de la fonction lorsque l'on approche la frontière dans la direction des z positifs ou négatifs respectivement.

Les conditions aux limites pour une onde de polarisation TM sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y^-(x, z_0) = H_y^+(x, z_0) \\ \frac{1}{\epsilon^-(x, z_0)} \frac{\partial H_y^-(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{\epsilon^+(x, z_0)} \frac{\partial H_y^+(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

1.3 Traitement et solution

Le problème qui nous occupe est la résolution de l'équation de propagation des ondes dans la structure de la Fig. 1.1. Nous venons de montrer que le coeur de ce problème est le calcul du champ électromagnétique de l'onde lumineuse dans la région modulée (région II). De nombreuses méthodes de calcul ont été mises au point pour répondre à cette question [12, 13].

La méthode de résolution que nous allons présenter est connue sous le nom de "Théorie Rigoureuse des Ondes Couplées" (RCWT). Elle permet d'obtenir une solution exacte des équations de Maxwell dans le cadre des réseaux structurés. Sa simplicité et sa capacité à résoudre le problème de la propagation dans la plupart des types de réseaux, en font l'une des méthodes les plus utilisées et les plus étudiées. La RCWT a été développée au départ pour l'étude des réseaux holographiques, ou plus précisément pour l'étude des réseaux plans à modulation sinusoïdale, par Moharam et Gaylord en 1981 [1]. Cette théorie fut ensuite étendue aux réseaux en relief de surface [14]. Elle s'applique également aux réseaux plans en transmission ou en réflexion ainsi qu'à des réseaux absorbants [15, 16] ou métalliques [17]. La Théorie Rigoureuse fut également améliorée de manière à rendre compte de la diffraction sous incidence conique [18], avant d'être étendue au cas des réseaux anisotropes [19] et des réseaux à deux dimensions [20].

La Théorie Rigoureuse des Ondes Couplées est basée sur la décomposition du champ électromagnétique et de la fonction de permittivité diélectrique en série de Fourier. Pour cette raison, elle est également appelée "méthode modale par développement de Fourier". Nous allons discrétiser le réseau dans la direction Z en considérant un ensemble de couches d'épaisseur d_i ($i = 1, \dots, Q$) au sein desquelles la permittivité peut être considérée comme constante en fonction de Z (voir Fig. 1.2). Il est important de remarquer que chaque couche sera considérée comme un nouveau milieu, à ajouter à la structure, avec sa propre épaisseur et sa propre permittivité. Ainsi, si l'on considère une couche quelconque du réseau, la décomposition de la permittivité en série de Fourier s'écrit,

$$\epsilon(x) = \sum_p \epsilon_p \exp[-ipK_x x] \quad (1.18)$$

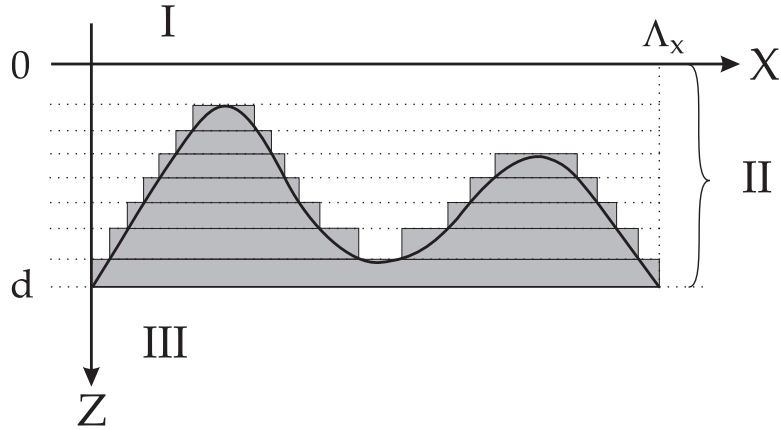


FIG. 1.2 – Discrétisation du réseau selon Z . Chaque couche est supposée avoir une permittivité constante selon Z . Le nombre de couches doit être suffisant de manière à approcher le profil réel de la distribution de la permittivité du réseau.

Le champ électromagnétique est déterminé dans chaque couche du réseau par l'approche des ondes couplées (développement de Rayleigh). Les conditions aux limites imposées par les équations de Maxwell (continuité aux interfaces des composantes tangentes de \vec{E} et \vec{H} , eq. 1.16 et 1.17) sont appliquées séquentiellement à chaque interface en partant du milieu émergent, en passant par les couches constitutives du réseau jusqu'au milieu incident, de manière à obtenir l'amplitude des champs diffractés transmis et réfléchis et par conséquent leurs efficacités de diffraction. Il est à noter que la précision du résultat obtenu dépend du nombre de termes retenus dans la décomposition du champ électromagnétique au moyen du développement de Rayleigh. En effet, le nombre de termes du développement doit être suffisant pour satisfaire la condition de conservation de l'énergie.

Le développement que nous allons présenter est basé sur les équations d'Helmholtz (équation du second ordre) plutôt que sur les équations de Maxwell du premier ordre. Cette approche présente l'avantage de réduire d'un facteur 2 la taille des matrices traitées, améliorant ainsi la vitesse de calcul. Par contre, en imposant l'indépendance des traitements TE et TM, elle ne permet pas de traiter le cas de l'incidence conique. Ce cas n'étant pas considéré dans le cadre de ce travail, l'approche présentée se justifie dès lors.

1.3.1 Polarisation TE

De manière similaire au développement effectué pour les régions incidente et émergente (Sect. 1.2.1), la première étape consiste à rechercher l'expression du champ transverse électrique dans la région II en utilisant le développement de Rayleigh.

$$E_y(x, z) = \sum_m S_m(z) \exp[-i\alpha_m x] \quad (1.19)$$

avec

$$\alpha_m = kn_I \sin \theta + mK_x \quad (1.20)$$

Les fonctions $S_m(z)$ sont les harmoniques spatiales (par rapport à x) du champ. Elles représentent les amplitudes complexes des différents ordres de diffraction transmis et réfléchis. Remarquons que les termes sommés ne sont pas individuellement solution de l'équation de Helmholtz. Les ondes planes du développement de Rayleigh ne sont pas des modes de propagation au sein du réseau.

L'équation de Helmholtz, eq. 1.14, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sum_m \left(\frac{\partial^2 S_m(z)}{\partial z^2} - \alpha_m^2 S_m(z) \right) \exp[-i\alpha_m x] \\ + \sum_m \sum_p k^2 \epsilon_p S_m(z) \exp[-i\alpha_{m-p} x] \end{aligned} \quad (1.21)$$

En multipliant cette équation par $\exp[-i\alpha_l x]$ ($l \in \mathbb{Z}$) et en intégrant sur la période Λ_x , on obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{\partial^2 S_l(z)}{\partial z^2} = \sum_m (\alpha_m^2 \delta_{lm} - k^2 \epsilon_{l-m}) S_m(z). \quad (1.22)$$

ou, sous forme matricielle :

$$\ddot{S} = \mathbf{M}S \quad (1.23)$$

où S est un vecteur colonne contenant les harmoniques spatiales du champ, \ddot{S} est un vecteur colonne contenant les dérivées secondes par rapport à z des harmoniques spatiales du champ, et \mathbf{M} une matrice carrée dont les éléments sont $\mathbf{M}_{lm} = \alpha_m^2 \delta_{lm} - k^2 \epsilon_{l-m}$. ϵ_{l-m} désigne la matrice de Toeplitz décrivant la permittivité, c'est-à-dire une matrice dont l'élément (l, m) est la composante de Fourier $l - m$.

Ce système d'équations peut être résolu numériquement en diagonalisant la matrice \mathbf{M} tronquée symétriquement, c'est-à-dire à laquelle on impose une dimension $N = (2j + 1)$ finie (les indices des sommes vont de $-j$ à $+j$). L'indice j désigne alors l'ordre de diffraction pris en considération dans la résolution. On limite ainsi le nombre d'harmoniques spatiales du champ (et de la permittivité) qui seront prises en compte dans la résolution. Le choix de N est empiriquement adapté au type de réseau étudié.

Diagonalisons la matrice \mathbf{M} . Soit \mathbf{V} la matrice des vecteurs propres de \mathbf{M} (d'éléments $\mathbf{V}_{l,m}$) et λ_m ses valeurs propres, en posant $T = \mathbf{V}^{-1}S$ et en multipliant à gauche les deux membres de l'équation 1.23 par \mathbf{V} , nous obtenons les équations découplées suivantes :

$$\ddot{T} = \mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{V}^{-1}T = \begin{pmatrix} \lambda_{-j}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_j^2 \end{pmatrix} T \quad (1.24)$$

dont les solutions sont :

$$T_m(z) = C_{1m} \exp[-\lambda_m z] + C_{2m} \exp[\lambda_m z]. \quad (1.25)$$

Les fonctions $T_m(z)$ sont les modes propres de propagation dans la direction Z . Les solutions du système 1.23 s'écrivent donc

$$S_l(z) = \sum_{m=-j}^{+j} \mathbf{V}_{lm} (C_{1m} \exp[-\lambda_m z] + C_{2m} \exp[\lambda_m z]). \quad (1.26)$$

Les C_{1m} et C_{2m} forment un ensemble de $2N$ constantes à déterminer. Par convention, le signe de λ_m est choisi tel que $\Re(\lambda_m) + \Im(\lambda_m) > 0$. Les termes en $\exp[-\lambda_m z]$ concernent les ordres se propageant dans la direction des Z positifs, les ordres transmis, tandis que les termes en $\exp[\lambda_m z]$ concernent les ordres se propageant dans la direction des Z négatifs, les ordres réfléchis.

Les équations 1.7, 1.8, 1.19 et 1.26 fournissent une représentation exacte du champ électrique transverse dans tout l'espace, mais les constantes R_m , T_m , C_{1m} et C_{2m} ne sont pas encore déterminées. Les conditions aux limites 1.16, en $z = 0$ et $z = d$, permettent de lever cette indétermination.

- continuité de $E_y(x, z)$ en $z = 0$:

$$\delta_{l0} + R_l = \sum_m \mathbf{V}_{lm}(C_{1m} + C_{2m}) \quad (1.27)$$

- continuité de $\frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z}$ en $z = 0$:

$$-ir_l(\delta_{l0} - R_l) = \sum_m \mathbf{V}_{lm}\lambda_m(-C_{1m} + C_{2m}) \quad (1.28)$$

- continuité de $E_y(x, z)$ en $z = d$:

$$T_l = \sum_m \mathbf{V}_{lm}(C_{1m} \exp[-\lambda_m d] + C_{2m} \exp[\lambda_m d]) \quad (1.29)$$

- continuité de $\frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z}$ en $z = d$:

$$it_l T_l = \sum_m \mathbf{V}_{lm}\lambda_m(-C_{1m} \exp[-\lambda_m d] + C_{2m} \exp[\lambda_m d]) \quad (1.30)$$

Les équations 1.27 et 1.28 peuvent s'exprimer sous une forme matricielle :

$$\mathbf{W}_I \begin{pmatrix} \delta_0 \\ R \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{II} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

avec

$$\mathbf{W}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -i\text{diag}(r) & i\text{diag}(r) \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

et

$$\mathbf{W}_{II} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ -\mathbf{V}\text{diag}(\lambda) & \mathbf{V}\text{diag}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

où r est donné par l'équation 1.10 et \mathbf{I} est la matrice identité.

De même, les équations 1.29 et 1.30 s'écrivent

$$\mathbf{W}_{III} \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{II}\Omega \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

où Ω est la matrice de transfert de la couche II,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \text{diag}(\exp[-\lambda d]) & 0 \\ 0 & \text{diag}(\exp[\lambda d]) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{W}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -i\text{diag}(t) & i\text{diag}(t) \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Ainsi, chaque milieu est caractérisé par une matrice $\mathbf{W}_{\mathbf{p}}$, de dimension $2N \times 2N$, telle que $\mathbf{W}_{\mathbf{p}+1}^{-1}\mathbf{W}_{\mathbf{p}}$ représente la matrice de transfert des harmoniques spatiales à l'interface entre les régions p et $p+1$. Entre deux interfaces successives, l'évolution du champ est représentée par une matrice de transfert de couche $\mathbf{\Omega}$. Les amplitudes des ordres transmis et réfléchis s'obtiennent en résolvant numériquement le système de $2N$ équations à $2N$ inconnues suivant :

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{\text{III}}^{-1}\mathbf{W}_{\text{II}}\mathbf{\Omega}\mathbf{W}_{\text{II}}^{-1}\mathbf{W}_{\text{I}} \begin{pmatrix} \delta_0 \\ R \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Ce formalisme matriciel permet d'étendre aisément le traitement au cas des structures multicouches.

1.3.2 Polarisation TM

De la même manière que pour la polarisation TE, nous introduisons le développement de Fourier de la fonction $\frac{1}{\epsilon(x)}$,

$$\frac{1}{\epsilon(x)} = \sum_p \zeta_p \exp[-ipK_x x] \quad (1.37)$$

ainsi que le développement de Rayleigh du champ transverse magnétique.

$$H_y(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_m(z) \exp[-i\alpha_m x] \quad (1.38)$$

En substituant les expressions 1.18, 1.37 et 1.38 dans 1.15, nous obtenons, de la même manière que dans le cas précédent,

$$\begin{aligned} \sum_p \epsilon_p \exp[-ipK_x x] & \left(\sum_{p'} \sum_m \alpha_{m+p'} \zeta_{p'} \alpha_m U_m(z) \exp[-i\alpha_{m+p'} x] \right. \\ & \left. + k^2 \sum_m U_m(z) \exp[-i\alpha_m x] \right) + \sum_m \frac{\partial^2 U_m(z)}{\partial z^2} \exp[-i\alpha_m x] = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

En multipliant par $\exp[-i\alpha_l x]$ et en intégrant sur la période Λ_x :

$$\frac{\partial^2 U_l(z)}{\partial z^2} = \sum_m \epsilon_{l-m} \sum_p (\alpha_p \zeta_{m-p} \alpha_m - k^2 \delta_{mp}) U_p(z) \quad (1.40)$$

ou, sous forme matricielle,

$$\ddot{U} = \mathbf{Q}U \quad (1.41)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{lm} = \epsilon_{l-m} \sum_p [\alpha_p \zeta_{m-p} \alpha_m - k^2 \delta_{mp}] \quad (1.42)$$

La solution du système différentiel 1.41 est

$$U_l(z) = \sum_m \mathbf{X}_{lm} (C_{3m} \exp[-\gamma_m z] + C_{4m} \exp[\gamma_m z]) \quad (1.43)$$

où \mathbf{X}_m et γ_m sont les vecteurs et valeurs propres de la matrice \mathbf{Q} . Les $2N$ constantes C_{3m} et C_{4m} seront déterminées grâce aux conditions aux limites. Celles-ci peuvent, comme au paragraphe précédent, être exprimées sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{\text{III}}^{-1} \mathbf{W}_{\text{II}} \Omega \mathbf{W}_{\text{I}} \mathbf{W}_{\text{II}} \begin{pmatrix} \delta_0 \\ R \end{pmatrix}$$

où les matrices d'interfaces sont cette fois

$$\mathbf{W}_{\text{I}} = \begin{pmatrix} I & I \\ -in_I^{-2} \text{diag}(r) & in_I^{-2} \text{diag}(r) \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

$$\mathbf{W}_{\text{II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \\ -[[\zeta]] \mathbf{X} \text{diag}(\gamma) & [[\zeta]] \mathbf{X} \text{diag}(\gamma) \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{W}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} I & I \\ -in_{\text{III}}^{-2} \text{diag}(t) & in_{\text{III}}^{-2} \text{diag}(t) \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

avec $[[\zeta]]_{nm} = \zeta_{n-m}$, la matrice de Toeplitz des coefficients de Fourier de $\frac{1}{\epsilon(x)}$. La matrice de transfert de la couche II est dans ce cas :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \text{diag} \exp[-\gamma d] & 0 \\ 0 & \text{diag} \exp[\gamma d] \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

1.3.3 Améliorations numériques

De manière générale, la méthode qui vient d'être exposée nécessite que l'on retienne tous les ordres propagatifs dans les régions I et III, ainsi qu'un nombre suffisant d'ordres évanescents. Le nombre d'ordres propagatifs est proportionnel à $\frac{A_x}{\lambda}$. La taille des matrices à traiter dépend du nombre d'ordres retenus pour l'analyse. Si l'on en retient N , la taille de la matrice à diagonaliser est $N \times N$. Le temps de calcul évolue en conséquence comme N^3 et la mémoire nécessaire au calcul sera proportionnelle à N^2 . L'augmentation progressive du nombre d'ordres retenus entraîne une convergence du rendement de diffraction de chaque ordre propagatif vers une valeur limite. Cette dernière est généralement rapide lorsqu'on étudie des structures diélectriques.

a. Polarisation TM : Reformulation du problème aux valeurs propres

D'importants problèmes de convergence apparaissent en polarisation TM lorsque le profil de permittivité présente de brusques variations [21] (réseaux en créneaux). Comme nous le verrons plus loin, ce sont justement ces structures qui nous intéressent. Ces instabilités furent d'abord attribuées à la faible convergence des séries de Fourier utilisées pour décrire le champ et la permittivité diélectrique. Les travaux de Lalanne et Morris [22] ont prouvé que la cause du manque de convergence n'était pas imputable à l'utilisation du développement de Fourier mais, à la manière dont il était utilisé au sein des équations de propagation. La reformulation qu'ils ont proposée a contribué à une nette amélioration de la convergence en polarisation TM. Li a complété les travaux de Lalanne et Morris en leur donnant une assise mathématique solide [23]. Les règles de factorisation de Fourier qu'il a introduites constituent un correctif réellement significatif, non seulement à la théorie des ondes couplées, mais également aux théories modales qui utilisent les séries de Fourier pour résoudre les problèmes de diffraction (ex : méthode BKK :Burckhardt Kaspar Knop [24]).

Ainsi³, afin d'assurer la convergence uniforme des solutions du problème aux valeurs propres pour le mode TM, il est indispensable de tenir compte des règles de factorisation de Fourier. L'équation 1.40 doit être remplacée par

³Le lecteur intéressé pourra trouver le développement mathématique justifiant cette assertion au paragraphe 2.4.2. de la thèse du Dr. V. Moreau [10].

$$\frac{\partial^2 U_l(z)}{\partial z^2} = \sum_m [[\zeta]]_{lm}^{-1} \sum_p (\alpha_p [[\epsilon]]_{mp}^{-1} \alpha_m - k^2 \delta_{mp}) U_p(z) \quad (1.48)$$

Cette nouvelle formulation demande un effort numérique supplémentaire pour inverser les matrices $[[\frac{1}{\epsilon}]]$ et $[[\epsilon]]$. Toutefois, elle permet une économie appréciable au niveau du temps de calcul et des ressources mémoires. En effet, à précision égale, elle permet de travailler avec des matrices de dimensions beaucoup plus petites.

b. Matrices S et structures multicouches

La modélisation des réseaux s'accompagne fréquemment d'une discrétisation de la structure étudiée en couches minces successives. A chaque interface, les conditions de continuité des champs électrique et magnétique se traduisent par une matrice qui lie les amplitudes complexes des champs des deux côtés de l'interface. Le système d'équations linéaires qui permet de déterminer l'amplitude des différents ordres de diffractions transmis et réfléchis est obtenu en multipliant les matrices de transfert des différentes couches. Cette approche directe conduit souvent à des solutions numériques désastreuses. La cause de ces instabilités [25, 26] réside dans la perte de chiffres significatifs lors de la manipulation des fonctions exponentielles qui décrivent la propagation des différents modes propres (matrice de transfert de couche, eq. 1.34), au sein du réseau. Le problème est exacerbé par le fait qu'une analyse précise impose que l'on conserve un grand nombre d'ordres. Ces difficultés numériques ont été résolues par plusieurs groupes [27, 28] qui ont introduit différents algorithmes récursifs numériquement stables. Nous présentons une de ces méthodes, appelée "*propagation des matrices de diffusion*" ("*Scattering-Matrix propagation*" ou "*S-Matrix propagation*").

Soit Q le nombre de couches. Pour chaque couche p d'épaisseur d_p et d'interfaces $z = z_{p-1}$ et $z = z_p$, on détermine les vecteurs et valeurs propres, \mathbf{V}_{lm}^p et λ_m^p . Le changement de variable $z = z - z_{p-1}$ permet d'écrire les matrices d'interfaces sous une forme identique aux équations 1.31 et 1.34.

En $z = z_{p-1}$:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{p}-1} \begin{pmatrix} C_1^{p-1} \\ C_2^{p-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} C_1^p \\ C_2^p \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

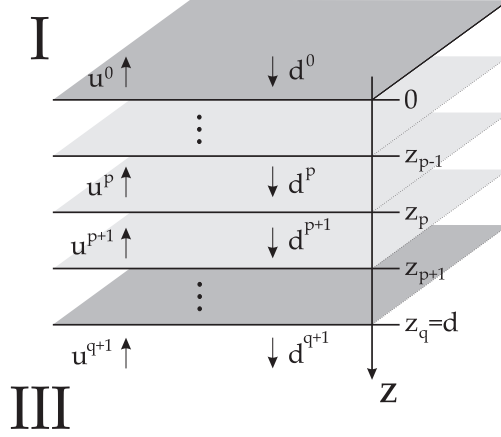


FIG. 1.3 – Représentation schématique et notations utilisées pour la propagation des modes dans un réseau multicouches.

En $z = z_p$:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{p}+1} \begin{pmatrix} C_1^{p+1} \\ C_2^{p+1} \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{\mathbf{p}} \Omega_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} C_1^p \\ C_2^p \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Nous pouvons donc écrire l'équation récursive :

$$\begin{pmatrix} C_1^{p+1} \\ C_2^{p+1} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} C_1^p \\ C_2^p \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

avec $\mathbf{L}_{\mathbf{p}} = \mathbf{W}_{\mathbf{p}+1}^{-1} \mathbf{W}_{\mathbf{p}} \Omega_{\mathbf{p}}$.

L'équation 1.36 devient dès lors :

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{\mathbf{p}=1}^{\mathbf{q}} \mathbf{L}_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \delta_0 \\ R \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Au vu des solutions 1.26, les amplitudes complexes des modes se propageant dans une couche p sont respectivement $C_{1m}^p \exp[-\lambda_m^p(z - z_{p-1})]$ et $C_{2m}^p \exp[\lambda_m^p(z - z_{p-1})]$, que nous regrouperons sous les vecteurs $d^p(z)$ (se propageant vers les z positifs, voir Fig.1.3) et $u^p(z)$ (se propageant vers les z négatifs) qui correspondent respectivement aux modes transmis et réfléchis. Nous avons montré que les conditions de continuité à l'interface $z = z_p$, entre la couche p et $p + 1$, donnait lieu au système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} d^{p+1}(z_p) \\ u^{p+1}(z_p) \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{\mathbf{p}+1}^{-1} \mathbf{W}_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} d^p(z_p) \\ u^p(z_p) \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

et que la propagation entre deux interfaces successives était décrite par une matrice de transfert :

$$\begin{pmatrix} d^{p+1}(z_{p+1}) \\ u^{p+1}(z_{p+1}) \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}_{\mathbf{p}+1} \begin{pmatrix} d^{p+1}(z_p) \\ u^{p+1}(z_p) \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

avec

$$\mathbf{\Omega}_{\mathbf{p}+1} = \begin{pmatrix} \text{diag}\{\exp[-\lambda^{p+1}(z_{p+1} - z_p)]\} & 0 \\ 0 & \text{diag}\{\exp[\lambda^{p+1}(z_{p+1} - z_p)]\} \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

Lors de la résolution d'un système multicouches, la troncature des valeurs propres λ_m^p , $\text{tronc} = \lambda_m^p - \Delta_m^p$ avec $\Re(\Delta_m^p) > 0$, introduit un facteur d'erreur qui se traduit, pour chaque couche, par une sous-matrice de fonctions exponentielles croissantes :

$$\mathbf{\Omega}_{\mathbf{p}, \text{tronc}} = \mathbf{\Omega}_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \text{diag}\{\exp[\Delta^p(z_p - z_{p-1})]\} & 0 \\ 0 & \text{diag}\{\exp[-\Delta^p(z_p - z_{p-1})]\} \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

Lorsque l'épaisseur des couches ou le nombre de couches augmente, le produit de ces sous-matrices peut donner lieu à d'importantes erreurs numériques.

L'algorithme des matrices \mathbf{S} permet de contrer ce problème numérique. Ainsi, pour chaque couche p , nous allons construire une matrice $\mathbf{S}^{\mathbf{p}}$ qui relie les amplitudes des modes propres dans la couche $p + 1$ et dans le milieu incident.

$$\begin{pmatrix} d^{p+1}(z_p) \\ u^0(0) \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} d^0(0) \\ u^{p+1}(z_p) \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Le sens physique de la matrice $\mathbf{S}^{\mathbf{p}}$ devient manifeste lorsqu'on l'écrit sous la forme :

$$\mathbf{S}^{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{\text{dd}}^{\mathbf{p}} & \mathbf{R}_{\text{du}}^{\mathbf{p}} \\ \mathbf{R}_{\text{ud}}^{\mathbf{p}} & \mathbf{T}_{\text{uu}}^{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

A titre d'exemple, les sous-matrices $\mathbf{T}_{\text{dd}}^{\mathbf{p}}$ et $\mathbf{R}_{\text{du}}^{\mathbf{p}}$ sont les matrices de transmission et de réflexion qui donnent l'amplitude des ordres transmis dans la couche $p + 1$ comme résultant de la transmission, à travers les p premières couches, de l'onde incidente dans la couche 0 et de la réflexion, sur les p premières couches, de l'onde réfléchie dans la couche $p + 1$.

La construction de la matrice $\mathbf{S}^{\mathbf{p}}$ s'effectue de la façon suivante.

On définit la matrice d'interface \mathbf{s}^p telle que :

$$\begin{pmatrix} d^{p+1}(z_p) \\ u^p(z_p) \end{pmatrix} = \mathbf{s}^p \begin{pmatrix} d^p(z_p) \\ u^{p+1}(z_p) \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

La matrice \mathbf{s}^p est obtenue à partir des composantes de la matrice

$$\mathbf{W}_{p+1}^{-1} \mathbf{W}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{11}^p & \mathbf{w}_{12}^p \\ \mathbf{w}_{21}^p & \mathbf{w}_{22}^p \end{pmatrix} :$$

$$\mathbf{s}^p = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{11}^p - \mathbf{w}_{12}^p (\mathbf{w}_{22}^p)^{-1} \mathbf{w}_{21}^p & \mathbf{w}_{12}^p (\mathbf{w}_{22}^p)^{-1} \\ -(\mathbf{w}_{22}^p)^{-1} \mathbf{w}_{21}^p & (\mathbf{w}_{22}^p)^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

De même, on écrit la matrice de transfert de couche $\hat{\mathbf{s}}^p$,

$$\begin{pmatrix} d^{p+1}(z_p) \\ u^p(z_{p-1}) \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{s}}^p \begin{pmatrix} d^p(z_{p-1}) \\ u^{p+1}(z_p) \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

que l'on peut construire à partir de \mathbf{s}^p :

$$\hat{\mathbf{s}}^p = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \text{diag}\{\exp[\lambda^p(z_p - z_{p-1})]\} \end{pmatrix} \mathbf{s}^p \begin{pmatrix} \text{diag}\{\exp[\lambda^p(z_p - z_{p-1})]\} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}_{dd}^p & \hat{\mathbf{r}}_{du}^p \\ \hat{\mathbf{r}}_{ud}^p & \hat{\mathbf{t}}_{uu}^p \end{pmatrix}.$$

Il est important de remarquer que les constituants de la matrice $\hat{\mathbf{s}}^p$ ne présentent pas de fonction exponentielle croissante lorsqu'on tronque les valeurs propres. Le problème d'instabilités numériques disparaît dès lors.

Les équations 1.58 et 1.61 permettent d'établir un ensemble de formules récursives pour obtenir les composantes des matrices \mathbf{S}^p :

$$\mathbf{T}_{dd}^p = \hat{\mathbf{t}}_{dd}^p [1 - \mathbf{R}_{du}^{p-1} \hat{\mathbf{r}}_{ud}^p]^{-1} \mathbf{T}_{dd}^{p-1} \quad (1.63)$$

$$\mathbf{R}_{du}^p = \hat{\mathbf{r}}_{du}^p + \hat{\mathbf{t}}_{dd}^p \mathbf{R}_{du}^{p-1} [1 - \hat{\mathbf{r}}_{ud}^p \mathbf{R}_{du}^{p-1}]^{-1} \hat{\mathbf{t}}_{uu}^p \quad (1.64)$$

$$\mathbf{R}_{ud}^p = \mathbf{R}_{ud}^{p-1} + \mathbf{T}_{uu}^{p-1} \hat{\mathbf{r}}_{ud}^p [1 - \mathbf{R}_{du}^{p-1} \hat{\mathbf{r}}_{ud}^p]^{-1} \mathbf{T}_{dd}^{p-1} \quad (1.65)$$

$$\mathbf{T}_{uu}^p = \mathbf{T}_{uu}^{p-1} [1 - \hat{\mathbf{r}}_{ud}^p \mathbf{R}_{du}^{p-1}]^{-1} \hat{\mathbf{t}}_{uu}^p \quad (1.66)$$

Cette récursion peut être amorcée en posant $\mathbf{S}^0 = \mathbf{s}^0$ et aboutit, après q étapes, à

$$\begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{dd}^q & \mathbf{R}_{du}^q \\ \mathbf{R}_{ud}^q & \mathbf{T}_{uu}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

soit $T = \mathbf{T}_{dd}^q \delta_0$ et $R = \mathbf{R}_{ud}^q \delta_0$.

1.4 Contribution à la RCWT

La Théorie Rigoureuse des Ondes Couplées qui vient d'être décrite permet de prédire le comportement d'un front d'onde lorsque celui-ci est modulé par un réseau de diffraction. Cet outil mathématique puissant va permettre de rendre compte des différents phénomènes que nous traiterons au cours de ce travail, à savoir, les résonances de modes guidés et les résonances de plasmons de surface. La première contribution personnelle à cet algorithme fut son extension aux systèmes multicouches. Le Dr. Vincent Moreau avait, dans le cadre de sa thèse, préparé cette implémentation par le biais de l'utilisation du formalisme des matrices S (cf. Section 1.3.3). L'algorithme actuel permet, en théorie, de traiter des structures pouvant être constituées d'une infinité de couches. En pratique, la limitation du traitement de telles structures dépend des caractéristiques de l'ordinateur utilisé (vitesse du processeur et volume de mémoire vive disponible).

Lors de l'étude des phénomènes de résonance, le besoin d'obtenir des informations supplémentaires quant à la distribution du champ électromagnétique à l'intérieur même des structures étudiées s'est fait sentir. Une partie originale de ce travail fut donc l'adaptation de l'algorithme RCWT de manière à rendre compte de la distribution du champ électromagnétique non plus en champ lointain (et par conséquent aux valeurs des rendements de diffraction dans les milieux incident et émergent), mais bien dans les différentes couches constitutives des systèmes étudiés. En poussant encore plus avant le raisonnement nous ayant permis de mettre au point la visualisation de la distribution du champ, il nous a été possible de rendre compte du comportement de structures multicouches résonnantes dont une ou plusieurs des couches constitutives sont composées d'un matériau non-linéaire du 3ème ordre (effet Kerr optique [29]).

1.4.1 Principe de fonctionnement de la RCWT

Il me paraît utile de procéder à une synthèse du principe de fonctionnement de la Théorie Rigoureuse des Ondes Couplées. Ce "mode d'emploi", épuré des formules mathématiques parfois hermétiques, permettra de mettre en lumière les informations encore "inexploitées" rendant possible l'obtention des informations relatives à la distribution du champ électromagnétique à l'intérieur du composant étudié.

Une fois le problème défini, c'est-à-dire, les paramètres du réseau connus, ainsi que les permittivités des milieux incident et émergent, les permittivités et épaisseurs des différentes couches constituant la structure étudiée et les paramètres du front d'onde incident (longueur d'onde et angle d'incidence), nous pouvons attaquer sa résolution. La première étape consiste à définir analytiquement les milieux incident et émergent. Cette caractérisation des régions I et III de la Fig. 1.1 s'effectue par l'intermédiaire des matrices \mathbf{W}_I et \mathbf{W}_{III} dont nous pouvons déterminer aisément les constituants, eq. 1.32 et 1.35 pour la polarisation TE et pour la polarisation TM respectivement.

La définition de la matrice \mathbf{W}_{II} caractérisant la région modulée n'est pas aussi immédiate et c'est là que se situe le coeur de la Théorie Rigoureuse des Ondes Couplées. La résolution de cette matrice \mathbf{W}_{II} passe par la décomposition en série de Fourier de la permittivité du réseau, eq.1.18. La construction de la matrice de Toeplitz découle de cette opération. En effet, la matrice de Toeplitz est destinée à caractériser la permittivité de la région II. C'est une matrice carrée de dimension $2N + 1$, où N est le nombre d'ordre de diffraction retenu lors du calcul, dont l'élément (l, m) est la composante de Fourier $l - m$. Il est maintenant possible de créer les matrices \mathbf{M} ou \mathbf{Q} selon qu'on travaille en polarisation TE ou TM (eq.1.23 ou 1.41). Ces matrices constituent déjà une certaine caractérisation mathématique de la région modulée puisque c'est sur cette base que viennent s'appliquer les harmoniques spatiales du champ (eq.1.22). L'extraction des valeurs et vecteurs propres de la matrice \mathbf{M} (ou \mathbf{Q}) va nous permettre d'obtenir la matrice \mathbf{W}_{II} que nous recherchons.

Nous disposons ainsi de toutes les matrices caractéristiques des différentes régions. Il ne reste qu'à procéder à la résolution du système au moyen de la méthode des matrices S (cf. 1.3.3.b). Cette méthode permet la généralisation aux systèmes multicouches. Nous résumerons la suite de la méthode de résolution dans cet esprit.

La mise en commun des matrices \mathbf{W}_p et \mathbf{W}_{p+1} (\mathbf{W}_I et \mathbf{W}_{II} dans le système de la Fig. 1.1) permet d'obtenir les composantes de la matrice \mathbf{s}^p (eq. 1.60). L'équation 1.59 nous enseigne le rôle de cette matrice \mathbf{s}^p . Elle permet d'obtenir les composantes du champ électromagnétique transmise et réfléchi à l'interface z_p . C'est à partir de cette relation qu'il sera possible de construire la distribution

du champ électromagnétique à l'intérieur des structures étudiées.

Il nous faut résoudre la relation 1.67. Nous venons de déterminer ce qui se passe dans une couche grâce aux matrices \mathbf{s}^P . Le passage d'une couche p à une couche $p + 1$ peut être réalisé au moyen de la matrice de transfert de couche $\hat{\mathbf{s}}^P$ (1.61). Cette dernière étape permettra la résolution de l'équation 1.67 et la détermination des valeurs des coefficients R_m et T_m donnant lieu, via les relations 1.12 et 1.13 aux rendements de diffraction des ordres m de diffraction réfléchis et transmis respectivement.

1.4.2 Distribution du champ électromagnétique

La matrice \mathbf{s}^P permet d'obtenir les modes propres de propagation transmis (\mathbf{d}) et réfléchis (\mathbf{u}) à l'interface z_p (eq. 1.59). C'est à partir de cette relation que nous pourrions obtenir la distribution du champ en tout point du composant étudié.

Modèle à 3 couches

Considérons un système simple constitué de 3 couches, voir Fig. 1.4. On peut écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{P+1}(z_p) \\ \mathbf{u}^P(z_p) \end{pmatrix} &= \mathbf{s}^P \begin{pmatrix} \mathbf{d}^P(z_p) \\ \mathbf{u}^{P+1}(z_p) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{P+1}(z_p) \\ \mathbf{u}^P(z_p) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{s}_P^{11} & \mathbf{s}_P^{12} \\ \mathbf{s}_P^{21} & \mathbf{s}_P^{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^P(z_p) \\ \mathbf{u}^{P+1}(z_p) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.68)$$

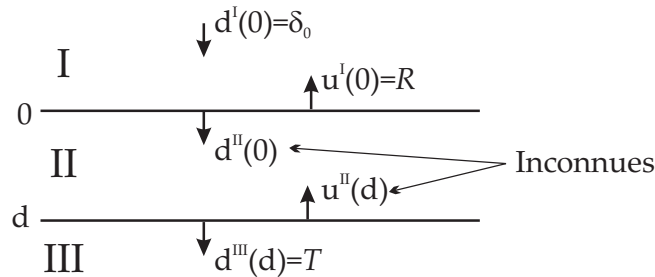


FIG. 1.4 – Système simple constitué de 3 couches. Les couches I et III constituent les milieux incident et émergent respectivement. $\mathbf{d}^i(p)$ et $\mathbf{u}^i(p)$ décrivent les modes transmis et réfléchis du milieu i à l'interface p .

Déterminons la distribution du champ pour la structure de la Fig. 1.4. Pour les milieux extérieurs, le problème est simple. En effet, le champ dans la région incidente est fourni par la superposition de l'onde incidente et des ordres de diffraction réfléchis (eq. 1.7). De même, le champ dans le milieu émergent est donné par les ordres de diffraction transmis (eq. 1.8). Il reste donc à déterminer le champ dans le milieu II. Pour ce faire, il faut connaître la fraction de champ transmis dans la région II, à l'interface 0 ainsi que la fraction du champ réfléchi dans la région II à l'interface d . Appliquons la relation 1.68 aux différentes interfaces de ce système ce qui conduit aux systèmes d'équations suivants :

$$p = 0 : \begin{cases} \mathbf{d}^{\text{II}}(0) = \mathbf{s}_0^{11} \mathbf{d}^{\text{I}}(0) + \mathbf{s}_0^{12} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \\ \mathbf{u}^{\text{I}}(0) = \mathbf{s}_0^{21} \mathbf{d}^{\text{I}}(0) + \mathbf{s}_0^{22} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \end{cases} \quad (1.69)$$

$$p = d : \begin{cases} \mathbf{d}^{\text{III}}(d) = \mathbf{s}_d^{11} \mathbf{d}^{\text{II}}(d) + \mathbf{s}_d^{12} \mathbf{u}^{\text{III}}(d) \\ \mathbf{u}^{\text{II}}(d) = \mathbf{s}_d^{21} \mathbf{d}^{\text{II}}(d) + \mathbf{s}_d^{22} \mathbf{u}^{\text{III}}(d) \end{cases} \quad (1.70)$$

Nous pouvons procéder à quelques simplifications :

- $\mathbf{d}^{\text{I}}(0)$ est l'onde incidente que l'on remplacera par δ_0 .
- $\mathbf{u}^{\text{I}}(0)$ correspond aux modes réfléchis dans le milieu I, à l'interface 0. Il conduit au rendement de diffraction réfléchi, R dans l'eq. 1.67.
- $\mathbf{d}^{\text{III}}(d)$ correspond à T dans l'eq. 1.67.
- $\mathbf{u}^{\text{III}}(d)$ n'existe pas. En effet, il n'y a pas de mode réfléchi, dans le milieu émergent, à l'interface d .

Nous obtenons donc :

$$p = 0 : \begin{cases} \mathbf{d}^{\text{II}}(0) = \mathbf{s}_0^{11} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{12} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \\ R = \mathbf{s}_0^{21} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{22} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \end{cases} \quad (1.71)$$

$$p = d : \begin{cases} T = \mathbf{s}_d^{11} \mathbf{d}^{\text{II}}(d) \\ \mathbf{u}^{\text{II}}(d) = \mathbf{s}_d^{21} \mathbf{d}^{\text{II}}(d) \end{cases} \quad (1.72)$$

De ces quatre équations, on peut déterminer $\mathbf{d}^{\text{II}}(0)$ et $\mathbf{u}^{\text{II}}(d)$ afin de définir la distribution du champ électromagnétique dans la région II.

$$T = \mathbf{s}_d^{11} \mathbf{d}^{\text{II}}(d) \longrightarrow \mathbf{d}^{\text{II}}(d) = (\mathbf{s}_d^{11})^{-1} T \quad (1.73)$$

$$\underline{\mathbf{u}^{\text{II}}(d)} = \mathbf{s}_d^{21} \mathbf{d}^{\text{II}}(d) \quad (1.74)$$

$$\underline{\mathbf{d}^{\text{II}}(0)} = \mathbf{s}_0^{11} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{12} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \quad (1.75)$$

Pour résoudre cette équation, il manque $\mathbf{u}^{\text{II}}(0)$ qui peut être fourni par la seconde relation du système 1.71. Il est possible d'obtenir cette information sans recourir à l'inversion de matrice, souvent à l'origine d'instabilités numériques. En effet, les relations 1.47, 1.55 et 1.62 nous enseignent que l'application de "diag(exp($\pm vp \cdot \text{épaisseur}$))" permet dans une même couche de passer d'une interface à l'autre. Cependant, la pratique a montré qu'il était préférable de n'utiliser que des fonctions exponentielles croissantes de manière à obtenir un algorithme stable. Ainsi, nous obtenons

$$\text{diag}(\exp(vp \cdot \text{épaisseur})) \cdot \mathbf{d}^{\text{I}}(p) = \mathbf{d}^{\text{I}}(p+1) \quad (1.76)$$

$$\text{diag}(\exp(vp \cdot \text{épaisseur})) \cdot \mathbf{u}^{\text{I}}(p+1) = \mathbf{u}^{\text{I}}(p) \quad (1.77)$$

Connaissant $\mathbf{u}^{\text{II}}(d)$, nous pouvons obtenir $\mathbf{u}^{\text{II}}(0)$ par application de la relation 1.77 :

$$\mathbf{u}^{\text{II}}(0) = \text{diag}(\exp(vp \cdot \text{épaisseur})) \mathbf{u}^{\text{II}}(d) \quad (1.78)$$

Les équations 1.73, 1.74, 1.75 et 1.78 permettent de définir complètement le champ dans la région II à partir des éléments $\mathbf{d}^{\text{II}}(0)$ et $\mathbf{u}^{\text{II}}(\mathbf{d})$. Toutefois, cette opération n'est possible que lorsque l'on connaît déjà les valeurs des matrices \mathbf{s}^{P} aux interfaces ainsi que les valeurs des rendements de diffraction. D'un point de vue pratique, cela nous entraîne à résoudre le problème des rendements de diffraction de la structure étudiée et, pendant cette résolution, d'extraire et de stocker les matrices \mathbf{s}^{P} , à chaque interface, ce qui permettra l'obtention de la distribution du champ électromagnétique.

Les relations 1.26 et 1.19 permettent d'atteindre le but recherché à partir des matrices $\mathbf{d}^{\text{II}}(0)$ et $\mathbf{u}^{\text{II}}(\mathbf{d})$.

$$E_y(x, z) = [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{u} \text{ ou } \mathbf{d}) \exp(\mathbf{vp} \cdot \mathbf{d})] \exp(-ix\alpha) \quad (1.79)$$

où \mathbf{V} représente la matrice des vecteurs propres et \mathbf{vp} la matrice des valeurs propres de la couche en question, dans la présente structure : la couche II. La

distribution du champ électromagnétique dans les régions incidente et émergente est obtenue en résolvant les relations 1.7 et 1.8.

Modèle à 4 couches

Augmentons la complexité de la structure étudiée et considérons un composant constitué de 4 couches : Fig.1.5. L'ajout d'une couche à la structure entraîne le passage de 4 équations fondamentales, permettant la recherche de la distribution du champ dans la structure à 3 couches, à 8 équations fondamentales.

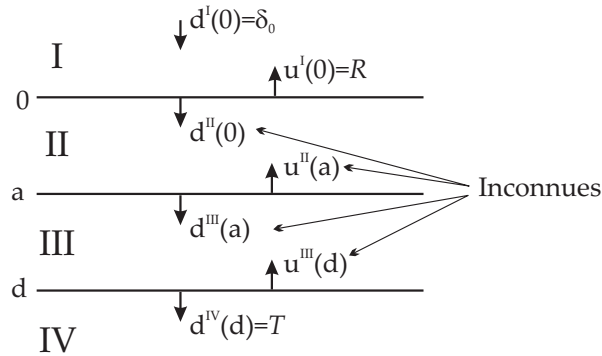


FIG. 1.5 – Structure constituée de 4 couches. Les couches I et IV constituent les milieux incident et émergent respectivement. $\mathbf{d}^i(p)$ et $\mathbf{u}^i(p)$ décrivent les modes transmis et réfléchis du milieu i à l'interface p .

Cette fois, nous devons déterminer les fractions du champ transmises aux interfaces 0 et a dans les milieux II et III respectivement, ce qui revient à déterminer $\mathbf{d}^{II}(0)$ et $\mathbf{d}^{III}(a)$. Il faut également déterminer les fractions du champ réfléchies aux interfaces a et d , dans les milieux II et III respectivement, c'est-à-dire $\mathbf{u}^{II}(a)$ et $\mathbf{u}^{III}(d)$. Comme dans le cas précédent, appliquons la relation 1.68 aux différentes interfaces du système de la Fig. 1.5.

$$p = 0 : \begin{cases} \mathbf{d}^{\text{II}}(0) = \mathbf{s}_0^{11} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{12} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \\ R = \mathbf{s}_0^{21} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{22} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \end{cases} \quad (1.80)$$

$$p = a : \begin{cases} \mathbf{d}^{\text{III}}(a) = \mathbf{s}_a^{11} \mathbf{d}^{\text{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{12} \mathbf{u}^{\text{III}}(a) \\ \mathbf{u}^{\text{II}}(a) = \mathbf{s}_a^{21} \mathbf{d}^{\text{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{22} \mathbf{u}^{\text{III}}(a) \end{cases} \quad (1.81)$$

$$p = d : \begin{cases} T = \mathbf{s}_d^{11} \mathbf{d}^{\text{III}}(d) \\ \mathbf{u}^{\text{III}}(d) = \mathbf{s}_d^{21} \mathbf{d}^{\text{III}}(d) \end{cases} \quad (1.82)$$

Ces systèmes d'équations associés aux relations 1.76 et 1.77 permettent de définir les matrices $\mathbf{d}^{\text{II}}(0)$, $\mathbf{d}^{\text{III}}(a)$, $\mathbf{u}^{\text{II}}(a)$ et $\mathbf{u}^{\text{III}}(d)$.

$$T = \mathbf{s}_d^{11} \mathbf{d}^{\text{III}}(d) \longrightarrow \mathbf{d}^{\text{III}}(d) = (\mathbf{s}_d^{11})^{-1} T \quad (1.83)$$

$$\underline{\mathbf{u}^{\text{III}}(d)} = \mathbf{s}_d^{21} \mathbf{d}^{\text{III}}(d) \quad (1.84)$$

$$(1.77) \longrightarrow \mathbf{u}^{\text{III}}(a) = \exp(+)\mathbf{u}^{\text{III}}(d) \quad (1.85)$$

$$R = \mathbf{s}_0^{21} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{22} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \longrightarrow \mathbf{u}^{\text{II}}(0) = (\mathbf{s}_0^{22})^{-1} R - (\mathbf{s}_0^{22})^{-1} \mathbf{s}_0^{21} \delta_0 \quad (1.86)$$

$$\underline{\mathbf{d}^{\text{II}}(0)} = \mathbf{s}_0^{11} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{12} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \quad (1.87)$$

$$(1.76) \longrightarrow \mathbf{d}^{\text{II}}(a) = \exp(+)\mathbf{d}^{\text{II}}(0) \quad (1.88)$$

$$\underline{\mathbf{d}^{\text{III}}(a)} = \mathbf{s}_a^{11} \mathbf{d}^{\text{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{12} \mathbf{u}^{\text{III}}(a) \quad (1.89)$$

$$\underline{\mathbf{u}^{\text{II}}(a)} = \mathbf{s}_a^{21} \mathbf{d}^{\text{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{22} \mathbf{u}^{\text{III}}(a) \quad (1.90)$$

où $\exp(+)$ = $\text{diag}(\exp(vp \cdot \text{épaisseur}))$

Le nombre d'inconnues ayant doublé, le nombre d'équations a doublé également. En ajoutant une couche, on ajoute une interface. Par conséquent, il faut obtenir les modes qui partent de cette interface et ceux qui y arrivent soit, deux matrices \mathbf{d} et deux matrices \mathbf{u} . Il faut remarquer que les équations supplémentaires obtenues dans le système à 4 couches, ne sont pas semblables à celles obtenues dans le cas précédent. Il n'est donc pas encore possible d'obtenir une formule récursive permettant de résoudre le problème de la distribution du champ. Toutefois, certaines de ces équations sont identiques dans les deux cas présentés, en effet, 1.73 correspond à 1.83, 1.74 à 1.84, 1.75 à 1.87 et 1.78 à 1.85. Nous disposons donc d'un bloc commun de 4 équations pouvant être utilisé en vue d'une extension à des systèmes constitués d'un nombre arbitraire de couches.

Modèle à 5 couches

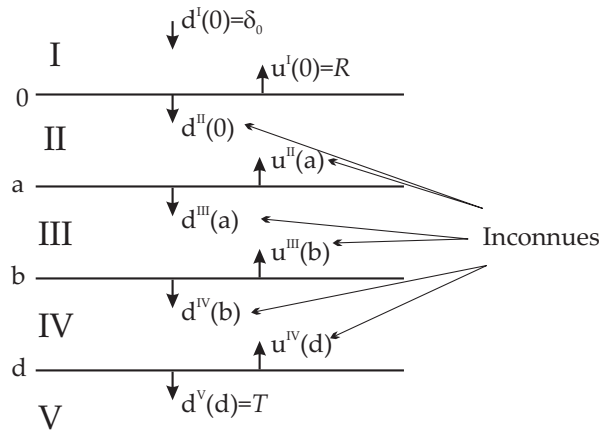


FIG. 1.6 – Structure constituée de 5 couches. Les couches I et V constituent les milieux incident et émergent, respectivement. $\mathbf{d}^i(p)$ et $\mathbf{u}^i(p)$ décrivent les modes transmis et réfléchis du milieu i à l'interface p .

Dans le but d'obtenir un système d'équations capable de représenter des structures constituées d'un nombre arbitraire de couches, nous devons passer à l'étude d'un système à 5 couches afin de voir s'il est possible d'établir une formule récursive générale. La Fig. 1.6 décrit le système étudié. De manière similaire aux cas précédents, appliquons le système 1.68 à cette structure. Nous obtenons :

$$p = 0 : \begin{cases} \mathbf{d}^{\text{II}}(0) = \mathbf{s}_0^{11} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{12} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \\ R = \mathbf{s}_0^{21} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{22} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \end{cases} \quad (1.91)$$

$$p = a : \begin{cases} \mathbf{d}^{\text{III}}(a) = \mathbf{s}_a^{11} \mathbf{d}^{\text{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{12} \mathbf{u}^{\text{III}}(a) \\ \mathbf{u}^{\text{II}}(a) = \mathbf{s}_a^{21} \mathbf{d}^{\text{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{22} \mathbf{u}^{\text{III}}(a) \end{cases} \quad (1.92)$$

$$p = b : \begin{cases} \mathbf{d}^{\text{IV}}(b) = \mathbf{s}_b^{11} \mathbf{d}^{\text{III}}(b) + \mathbf{s}_b^{12} \mathbf{u}^{\text{IV}}(b) \\ \mathbf{u}^{\text{III}}(b) = \mathbf{s}_b^{21} \mathbf{d}^{\text{III}}(b) + \mathbf{s}_b^{22} \mathbf{u}^{\text{IV}}(b) \end{cases} \quad (1.93)$$

$$p = d : \begin{cases} T = \mathbf{s}_d^{11} \mathbf{d}^{\text{IV}}(d) \\ \mathbf{u}^{\text{IV}}(d) = \mathbf{s}_d^{21} \mathbf{d}^{\text{IV}}(d) \end{cases} \quad (1.94)$$

Il faut déterminer les matrices : $\mathbf{d}^{\text{II}}(0)$, $\mathbf{d}^{\text{III}}(a)$, $\mathbf{d}^{\text{IV}}(b)$, $\mathbf{u}^{\text{II}}(a)$, $\mathbf{u}^{\text{III}}(b)$ et $\mathbf{u}^{\text{IV}}(d)$. Procédons comme précédemment :

$$T = \mathbf{s}_d^{11} \mathbf{d}^{\text{IV}}(d) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{d}^{\text{IV}}(d) = (\mathbf{s}_d^{11})^{-1} T \quad (1.95)$$

$$\underline{\mathbf{u}^{\text{IV}}(d)} = \mathbf{s}_d^{21} \mathbf{d}^{\text{IV}}(d) \quad (1.96)$$

$$(1.77) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{u}^{\text{IV}}(b) = \exp(+)\mathbf{u}^{\text{IV}}(d) \quad (1.97)$$

$$R = \mathbf{s}_0^{21} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{22} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{u}^{\text{II}}(0) = (\mathbf{s}_0^{22})^{-1} R - (\mathbf{s}_0^{22})^{-1} \mathbf{s}_0^{21} \delta_0 \quad (1.98)$$

$$\underline{\mathbf{d}^{\text{II}}(0)} = \mathbf{s}_0^{11} \delta_0 + \mathbf{s}_0^{12} \mathbf{u}^{\text{II}}(0) \quad (1.99)$$

$$(1.76) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{d}^{\text{II}}(a) = \exp(+)\mathbf{d}^{\text{II}}(0) \quad (1.100)$$

Créons dès à présent une séparation entre cet ensemble de 6 équations et le reste de la résolution. En effet, ces équations sont similaires aux 6 premières équations obtenues lors de la résolution du problème à 4 couches : (1.83) à (1.88). Il est remarquable aussi que ces équations puissent s'appliquer à la résolution du

système à 3 couches. En effet, les quatre équations relatives à cette dernière configuration sont présentes, les deux autres équations (1.98 et 1.100) superflues sont simplement redondantes. Nous voyons ainsi se dégager un ensemble d'équations applicables à 3 structures différentes et pouvant peut-être mener à une résolution récursive du problème.

Jusqu'à présent, les systèmes obtenus à partir de l'équation 1.68 appliquée aux différentes interfaces ont été utilisés, avec les équations 1.76 et 1.77, pour résoudre le problème de la détermination de la distribution du champ dans les structures à 3 et 4 couches. Pour l'étude du composant de la Fig. 1.6, ces seules équations ne suffisent plus. En effet, elles ne suffisent pas pour obtenir la matrice des modes propres de propagation $\mathbf{d}^{\text{IV}}(b)$. Par conséquent, la suite de la résolution du système s'en trouve interrompue. Si l'on compare la résolution de ce système avec celle de la structure à 4 milieux, il est désormais impossible de relier les équations 1.88 et 1.89.

L'utilisation de la relation 1.57 va permettre de surmonter ce problème. Cette relation fournit l'équation :

$$\mathbf{d}^{i+1}(p) = \mathbf{T}_{\text{dd}}^i \delta_0 + \mathbf{R}_{\text{du}}^i \mathbf{u}^{i+1}(p) \quad (1.101)$$

où les matrices \mathbf{T}_{dd}^i et \mathbf{R}_{du}^i sont les matrices de transmission et de réflexion qui donnent l'amplitude des ordres transmis et réfléchi dans la couche $i + 1$.

La résolution des équations décrivant le système à 5 couches peut se poursuivre en appliquant l'équation 1.101 à la 3ème couche (i) et à l'interface b (p).

$$\underline{\mathbf{d}^{\text{IV}}(b)} = \mathbf{T}_{11}^{\text{III}} \delta_0 + \mathbf{R}_{12}^{\text{III}} \mathbf{u}^{\text{IV}}(b) \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{\text{IV}}(b) = \mathbf{s}_b^{11} \mathbf{d}^{\text{III}}(b) + \mathbf{s}_b^{12} \mathbf{u}^{\text{IV}}(b) &\longrightarrow \\ \mathbf{d}^{\text{III}}(b) = (\mathbf{s}_b^{11})^{-1} \mathbf{d}^{\text{IV}}(b) - (\mathbf{s}_b^{11})^{-1} \mathbf{s}_b^{12} \mathbf{u}^{\text{IV}}(b) & \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$\underline{\mathbf{u}^{\text{III}}(b)} = \mathbf{s}_b^{21} \mathbf{d}^{\text{III}}(b) + \mathbf{s}_b^{22} \mathbf{u}^{\text{IV}}(b) \quad (1.104)$$

$$(1.77) \longrightarrow \mathbf{u}^{\text{III}}(a) = \exp(+)\mathbf{u}^{\text{III}}(b) \quad (1.105)$$

A ces équations viennent s'associer les relations du système 1.92 qui permettent de terminer la résolution du système.

$$\underline{\mathbf{d}^{\text{III}}(a)} = \mathbf{s}_a^{11} \mathbf{d}^{\text{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{12} \mathbf{u}^{\text{III}}(a) \quad (1.106)$$

$$\underline{\mathbf{u}^{\text{II}}(a)} = \mathbf{s}_a^{21} \mathbf{d}^{\text{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{22} \mathbf{u}^{\text{III}}(a) \quad (1.107)$$

Ces deux dernières équations, présentes également dans la résolution de la structure à 4 couches, peuvent constituer un second bloc d'équations communes à différentes structures multicouches.

Modèle à N couches

L'étude des cas précédents a montré que :

- les équations 1.95 à 1.100 constituent un premier bloc commun d'équations applicables aux systèmes constitués de 3 à N couches,
- les équations 1.106 et 1.107 constituent un second ensemble d'équations applicables aux structures de 4 à N couches.
- les équations 1.102 à 1.105 forment un coeur récursif d'équations applicables aux architectures de 5 à N couches.

A l'aide de ces trois groupes d'équations, il est possible de déterminer les éléments \mathbf{d} et \mathbf{u} permettant d'obtenir la distribution du champ électromagnétique dans les structures étudiées et constituées d'un nombre quelconque de milieux.

Par soucis de clarté et de synthèse, réécrivons les trois groupes d'équations de manière généralisée à une structure à N couches et dont les p interfaces vont de 0 à d .

- Premier bloc commun.

$$\mathbf{d}^{\mathbf{N}-1}(d) = (\mathbf{s}_d^{11})^{-1}T \quad (1.108)$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{N}-1}(d) = \mathbf{s}_d^{21}\mathbf{d}^{\mathbf{N}-1}(d) \quad (1.109)$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{N}-1}(d-1) = \exp(+)\mathbf{u}^{\mathbf{N}-1}(d) \quad (1.110)$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{II}}(0) = (\mathbf{s}_0^{22})^{-1}R - (\mathbf{s}_0^{22})^{-1}\mathbf{s}_0^{21}\delta_0 \quad (1.111)$$

$$\mathbf{d}^{\mathbf{II}}(0) = \mathbf{s}_0^{11}\delta_0 + \mathbf{s}_0^{12}\mathbf{u}^{\mathbf{II}}(0) \quad (1.112)$$

$$\mathbf{d}^{\mathbf{II}}(a) = \exp(+)\mathbf{d}^{\mathbf{II}}(0) \quad (1.113)$$

Cet ensemble d'équations s'applique aux structures possédant un nombre arbitraire de couches. Il permet, seul, de résoudre entièrement le problème du système à 3 couches.

- Second bloc commun.

$$\mathbf{d}^{\mathbf{III}}(a) = \mathbf{s}_a^{11}\mathbf{d}^{\mathbf{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{12}\mathbf{u}^{\mathbf{III}}(a) \quad (1.114)$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{II}}(a) = \mathbf{s}_a^{21}\mathbf{d}^{\mathbf{II}}(a) + \mathbf{s}_a^{22}\mathbf{u}^{\mathbf{III}}(a) \quad (1.115)$$

Ce second bloc d'équations s'applique aux structures constituées de 4 couches et plus. Associé au premier bloc commun, il résout entièrement le problème du système à 4 couches.

- Bloc récursif.

$$\mathbf{d}^{\mathbf{N}-i}(d-i) = \mathbf{T}_{11}^{\mathbf{N}-(i+1)}\delta_0 + \mathbf{R}_{12}^{\mathbf{N}-(i+1)}\mathbf{u}^{\mathbf{N}-i}(d-i) \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{\mathbf{N}-(i+1)}(d-i) = \\ (\mathbf{s}_{d-i}^{11})^{-1}\mathbf{d}^{\mathbf{N}-i}(d-i) - (\mathbf{s}_{d-i}^{11})^{-1}\mathbf{s}_{d-i}^{12}\mathbf{u}^{\mathbf{N}-i}(d-i) \end{aligned} \quad (1.117)$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{N}-(i+1)}(d-i) = \mathbf{s}_{d-i}^{21} \mathbf{d}^{\mathbf{N}-(i+1)}(d-i) + \mathbf{s}_{d-i}^{22} \mathbf{u}^{\mathbf{N}-i}(d-i) \quad (1.118)$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{N}-(i+1)}(d-(i+1)) = \exp(+)\mathbf{u}^{\mathbf{N}-(i+1)}(d-i) \quad (1.119)$$

Ce troisième ensemble d'équations, appelé bloc récursif, s'applique aux structures de N couches, avec $N \geq 5$. Un tel système est constitué de $p = N - 1$ interfaces, allant de 0 à d . L'indice i est compris entre 1 et $(N - 4)$. Cet ensemble d'équations, associé aux deux précédents permet de résoudre les structures complexes à N couches, où $N \geq 5$. Pour de tels systèmes, il convient d'appliquer le bloc récursif $N - 4$ fois.

Une fois que la propagation des modes au travers des différentes couches étudiées est obtenue, la relation 1.79 permet de convertir cette information en une visualisation de la distribution du champ électromagnétique dans la structure à N couches, cf. Fig. 1.7.

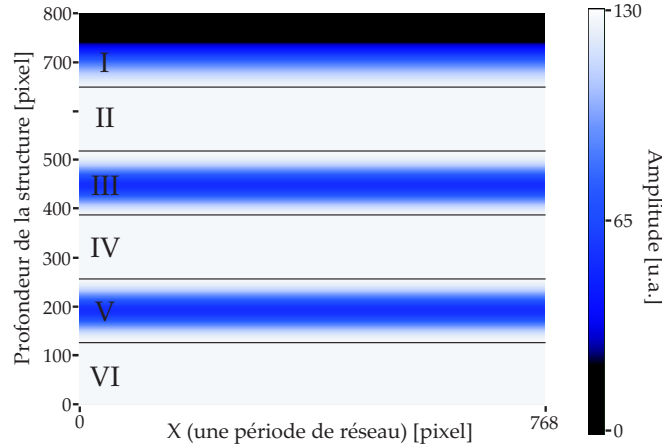


FIG. 1.7 – Exemple de visualisation de la distribution de l'intensité du champ électromagnétique dans un composant multicouche, pour la polarisation TM, sous incidence normale. Il s'agit d'un système anti-reflet à 6 couches. Le milieu incident est constitué d'air, $\epsilon = 1$. Les milieux II, IV ont une permittivité, $\epsilon = 4$ et une épaisseur $d = 158\text{nm}$. Les couches III et V ont une permittivité, $\epsilon = 2$, et une épaisseur, $d = 224\text{nm}$. Le milieu émergent est également de permittivité, $\epsilon = 4$.

1.4.3 Comportement non-linéaire du 3ème ordre

Lors de l'étude des systèmes actifs à résonance de modes guidés, nous avons été amenés à envisager l'utilisation de matériaux non-linéaires du 3ème ordre. Nous souhaitons pouvoir rendre compte du comportement de composants dont une ou plusieurs des couches constitutives sont réalisées avec un matériau présentant un effet Kerr optique. Un tel type de matériau possède un indice de réfraction variant en fonction de l'intensité du faisceau lumineux auquel il est soumis. L'indice d'un tel matériau obéit à la relation

$$n = n_0 + n_2 I \quad (1.120)$$

où n_0 est l'indice de réfraction linéaire du matériau lorsqu'il est soumis un éclairement extérieur faible, n_2 est l'indice de réfraction non-linéaire du matériau et I est l'intensité du faisceau incident. Dans la suite, nous assimilerons cette dernière au carré du champ électromagnétique.

Sous un éclairement constant, le comportement d'une structure diffractante "linéaire", c'est-à-dire dont aucun des constituants n'est construit dans un matériau non-linéaire, présente une réponse ne variant pas au cours du temps. Il n'en va pas de même lorsque cette même structure, ou une partie de celle-ci, est composée d'un matériau non-linéaire du 3ème ordre. En effet, sous l'action de l'éclairement incident, les propriétés optiques ⁴ du matériau non-linéaire vont se trouver modifiées. La variation de l'indice de réfraction entraînera une modification de la réponse du composant.

Rendre compte numériquement de la modification de la réponse d'une structure dont une ou plusieurs couches présentent un effet Kerr optique n'est pas chose aisée. La première difficulté est de déterminer l'intensité, I , auquel est soumis le matériau non-linéaire. Une fois I connu, nous pouvons déterminer la variation d'indice de réfraction et, par son inclusion dans la théorie rigoureuse, obtenir la réponse du composant. Toutefois, la modification des paramètres de la structure peut entraîner une modification de l'éclairement au niveau du matériau non-linéaire et ainsi modifier une nouvelle fois son indice de réfraction et la

⁴Nous limiterons notre étude aux cas idéaux des matériaux non-linéaires isotropes présentant une variation de l'indice de réfraction en fonction de l'intensité du faisceau incident, défini par la relation 1.120

réponse du composant. Il faudra donc à nouveau procéder au moyen d'un processus itératif jusqu'à obtenir une stabilisation de la réponse du système étudié. Expérimentalement, ce processus est presque immédiat.

Pour résoudre numériquement ce problème, La première étape est la détermination de l'intensité à laquelle est soumise le matériau non-linéaire. Ce problème peut être résolu grâce aux modifications qui ont été apportées à l'algorithme RCW, détaillées dans la section précédente. Via cet aménagement, il est désormais possible de connaître la distribution du champ électromagnétique, et par conséquent la valeur de I , en tout point du composant étudié.

Un premier traitement par l'algorithme RCW fournit la valeur de I au sein du matériau non-linéaire. Lors d'un second traitement par l'algorithme RCW, la valeur de l'indice de réfraction est modifiée en fonction de la valeur de I fournie par la première itération. Ce second passage fournit une nouvelle distribution de I au sein du composant. L'opération est renouvelée jusqu'à ce que la distribution de I dans la structure soit stable ⁵.

Pour illustrer notre propos, considérons un exemple. La Fig. 1.8 (a) présente une structure constituée de deux couches, hors milieux extérieurs : un réseau et une couche homogène adjacente. Le réseau est enregistré dans un matériau linéaire tandis que la couche adjacente est constituée par un matériau non-linéaire du 3ème ordre dont l'indice non-linéaire est $n_2 = 10^{-12}$. La Fig. 1.8 (b) est une visualisation de la distribution de I dans le composant. Cette visualisation correspond à la distribution de I obtenue après la première itération, lorsque le composant est défini sans tenir compte de l'indice non-linéaire. Il est intéressant de remarquer que la distribution de I n'est pas homogène dans toute la couche non-linéaire. Il est par conséquent délicat de considérer une seule valeur de I pour l'ensemble de la couche. Notre algorithme permettant le traitement des structures multicouches sans aucune limitation pour le nombre de couches, si ce n'est le temps de calcul, nous avons procédé à la discrétisation de la couche non-linéaire afin d'approcher au mieux la réalité phénoménologique. De manière arbitraire, nous avons choisi de représenter chaque couche constitutive du composant sur 128 pixels de haut et $(N \times 128)$ pixels de large où N est le nombre total de

⁵Le seuil de stabilité est arbitraire. Nous définissons un composant comme stable lorsque la variation de la distribution de I au sein de celui-ci devient inférieure au pourcent.

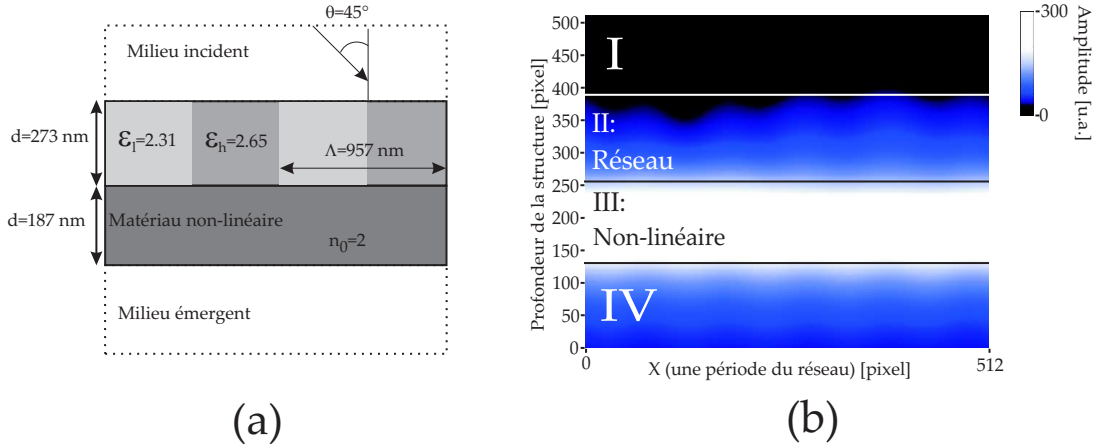


FIG. 1.8 – (a) Exemple de structure étudiée dont une couche est constituée d'un matériau non-linéaire. Les milieux I et IV sont en verre ($\epsilon = 2.31$) et constituent les milieux incident et émergent. Le réseau est en relief de surface enregistré dans de la photorésine, $\epsilon_h = 2.65$. Les propriétés du matériau non-linéaire ont été arbitrairement choisies de manière réaliste : $n_0 = 2$ et $n_2 = 1 \cdot 10^{-12}$. (b) Visualisation de la distribution de l'intensité du champ électromagnétique dans le composant étudié, pour une onde incidente de polarisation TM, de longueur d'onde $\lambda = 632.8\text{nm}$ et d'incidence $\theta = 45^\circ$ dans le milieu incident. Chaque couche du composant est codée sur 128 pixels ainsi que les milieux extérieurs.

couches, y compris les milieux extérieurs. Ainsi, la discrétisation de la couche non-linéaire s'effectue par le passage de une à 128 couches non-linéaires auxquelles on applique une valeur de I ajustée à chaque couche. En pratique, la valeur moyenne de I sur la ligne en question sera prise en compte. Il est également possible d'attribuer à chacune des 128 couches un profil de permittivité correspondant à l'application de la formule 1.120 en chaque point de la ligne. Cependant, la distribution d'intensité peut présenter une certaine périodicité selon l'axe X , cf. Fig.1.8. Cette périodicité du champ pourrait dès lors générer une périodicité de la distribution de permittivité dans la couche non-linéaire, entraînant l'apparition d'un réseau supplémentaire. Il est plus difficile d'interpréter le fonctionnement d'une structure comprenant plusieurs réseaux. C'est pourquoi, cette application rigoureuse en chaque point de la relation 1.120 ne sera employée qu'en certaines occasions où il n'y aura pas de génération d'un second réseau.

Une fois la première distribution de I au sein de la couche non-linéaire obtenue,

nous pouvons procéder à l'application de la relation 1.120 afin de déterminer un nouveau profil de la distribution de la permittivité pour la couche non-linéaire. L'algorithme RCW permet de connaître à la fois le rendement de diffraction du composant possédant ce profil d'intensité ainsi que la distribution de I dans cette nouvelle structure. Chaque point de la nouvelle distribution est comparé avec le point correspondant de la précédente distribution d'intensité. Si un point de la distribution d'intensité présente une variation supérieure à 1%⁶ par rapport à sa valeur dans la distribution précédente, alors il sera nécessaire de procéder une nouvelle fois à l'application de la relation 1.120. Il s'en suivra un nouveau profil de permittivité pour la couche non-linéaire. L'algorithme RCW fournira alors de nouvelles valeurs du rendement de diffraction et une nouvelle distribution d'intensité dans la structure. De nouvelles comparaisons seront effectuées et le processus itératif sera répété jusqu'à ce que la variation entre chaque point de deux distributions d'intensités successives devienne inférieure au pourcent. Après n itérations, nous obtenons la distribution finale de I ainsi que le rendement de diffraction du composant.

La Fig. 1.9 présente les résultats obtenus après 13 itérations pour la structure de la Fig.1.8. La Fig.1.9 (a) reprend la distribution initiale de l'intensité dans le composant, sans prise en compte du comportement non-linéaire. La Fig.1.9 (b) présente l'évolution du rendement de diffraction de la structure étudiée. Il s'agit du rendement de diffraction dans l'ordre 0 réfléchi, pour la polarisation TM. Le rendement initial est de 95.7%. Celui-ci chute dès la première itération pour se stabiliser vers 1.54% après 13 itérations. Cette diminution importante du rendement peut trouver une explication dans l'examen de la Fig.1.9 (c), montrant la distribution de l'intensité à la fin du processus itératif. Il apparaît clairement qu'après 13 itérations, lorsque le composant peut être considéré stable, la structure de la distribution de l'intensité du champ électromagnétique et par conséquent, la distribution du champ électromagnétique elle-même se trouve fortement modifiée. Le champ n'est plus confiné dans la couche adjacente au réseau, ce n'est plus un système résonnant pour la longueur d'onde utilisé : $\lambda = 632.8\text{nm}$. Les paramètres de la couche non-linéaire ont été modifiés par le faisceau incident ce qui a changé la réponse du système.

⁶Cette valeur est arbitraire et constitue un critère d'arrêt. Les simulations ont montrées qu'une variation de 1% de l'intensité engendrera des variations négligeables des valeurs du rendement de diffractions.

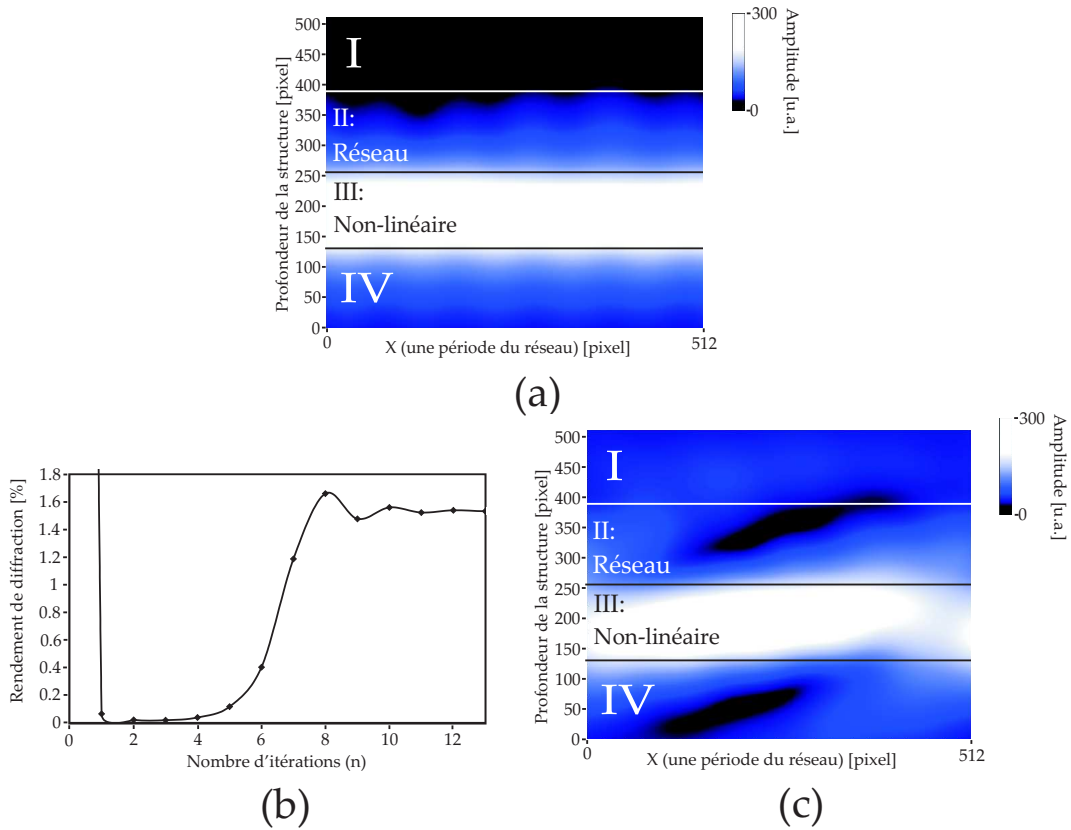


FIG. 1.9 – Résultats obtenus après 13 itérations appliquées à la structure de la Fig. 1.8. L'intensité du faisceau incident est de 100MW.(a)Visualisation de la distribution initiale de l'intensité dans la structure étudiée. (b)Evolution du rendement de diffraction (ordre 0 réfléchi, polarisation TM) du composant au cours des itérations successives. (c)Visualisation de la distribution de l'intensité du champ électromagnétique après 13 itérations.

Hystérèse et bistabilité

Au cours de ce travail, nous avons été amenés à nous interroger sur la possibilité d'existence d'un phénomène de bistabilité, ou d'hystérèse, dans les structures à résonance de modes guidés. Ce phénomène implique une réponse différente du composant selon son histoire. Ainsi, si le composant a été soumis à un éclairage faible, il répondra d'une certaine manière alors qu'il répondra d'une autre manière s'il vient d'être soumis à un éclairage intense (cf. Fig.1.10). Ce type de comportement est intimement lié à l'utilisation de matériaux non-linéaires.

Grâce aux améliorations apportées au programme RCW qui viennent d'être présentées, il est aisé de rendre compte de tels phénomènes s'ils interviennent. En effet, la condition d'arrêt des itérations dans la simulation du comportement de structures non-linéaires prend en compte l'itération précédente. Par conséquent, l'histoire du composant peut influencer sur sa réponse. Ainsi, il est aisé de procéder à un balayage aller-retour entre deux valeurs de l'intensité du faisceau incident.



FIG. 1.10 – Représentation du phénomène de bistabilité. La réponse est différente selon que l'on vient des faibles intensités ou des fortes intensités incidentes.

Bibliographie

- [1] M.G. Moharam and T.K. Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction," *J. Opt. Soc.Am.*, **71**, 811-818 (1981).
- [2] E. Hecht, *Optics fourth edition* (Addison Wesley, San Francisco, 2002).
- [3] R.W. Wood, "On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum," *Philos. Mag.*, **4**, 396-402 (1902).
- [4] Lord Rayleigh, "Note on the remarkable case of diffraction spectra described by Prof. Wood," *Philos. Mag.*, **14**, 60-65 (1907).
- [5] M. Nevière, "The homogeneous problem" in *Electromagnetic Theory of Gratings*, R. Petit, ed.(Springer-Verlag, Berlin, 1980) 123-157.
- [6] J.R. Andrewartha, J.R. Fox and I.J. Wilson, "Resonance anomalies in the lamellar grating," *Opt. Acta*, **26**, 68-89 (1979).
- [7] D. Maystre and R. Petit, *Rev. Phys. Appl.*, **7**, 427 (1972).
- [8] R. Petit, *Nouv. Rev. Opt.*, **6**, 129 (1975).
- [9] H. Kogelnik, "Coupled wave theory for thick hologram grating," *Bell. Syst. Techn. J.*, **48**, 2909 (1969).
- [10] V. Moreau, "Intégration de systèmes d'interconnactions optiques reconfigurables," Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en sciences Physiques, Faculté des Sciences, Université de Liège, 2002.
- [11] W. Magnus and S. Winkler, "Floquet's Theorem" §1.2 in *Hill's Equation* New-York : Dover, pp. 3-8, 1979.
- [12] R. Petit, *Electromagnetic Theory of Gratings*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [13] E.G. Loewen and E. Popov, "Diffraction gratings and applications," *Opt. Eng. series*, Marcel Dekker, ed. New-York - Basel, 1997.
- [14] M.G. Moharam and T.K. Gaylord, "Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings," *J. Opt. Soc. Am.*, **72**, 1385-1392 (1982).

- [15] M.G. Moharam and T.K. Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction - E-mode polarization and losses," *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 451-455 (1983).
- [16] W.E. Baird, M.G. Moharam and T.K. Gaylord, "Diffraction characteristics of planar absorption gratings," *Appl. Phys. B*, **32**, 15-20 (1983).
- [17] M.G. Moharam and T.K. Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3**, 1780-1796 (1986).
- [18] M.G. Moharam and T.K. Gaylord, "Three dimensional vector coupled-wave analysis of planar-grating diffraction," *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 1105-1112 (1983).
- [19] K. Rokushima and J. Yamakita, "Analysis of anisotropic dielectric gratings," *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 901-908 (1983).
- [20] M.G. Moharam, "Coupled-wave analysis of two-dimensional gratings," in *Holographic Optics : Design and Applications*, I. Cindrich, ed., Proc. SPIE 883, 8-11 (1988).
- [21] L. Li and C.W. Haggans, "Convergence of the coupled-wave method for metallic lamellar diffraction gratings", *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 1184-1189 (1993).
- [22] P. Lalanne and G.M. Morris, "Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM Polarization," *J. Opt. Soc. Am. A*, **13**, 779-782 (1996).
- [23] L. Li, "Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures," *J. Opt. Soc. Am. A*, **13**, 1870-1876 (1996).
- [24] E. Noponen, "Electromagnetic Theory of Diffractive Optics," Dissertation for the degree of Doctor of Technology, Department of Technical Physics, Faculty of Information Technology, Helsinki University of Technology, FIN-02150 Espoo, Finland, 1994.
- [25] N. Château and J.P. Hugonin, " Algorithm for rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction," *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 1321-1331 (1994).
- [26] N.P.K. Cotter, T.W. Preist and J.R. Sambles, "Scattering-matrix approach to multilayer diffraction," *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**, 1097-1103 (1995).
- [27] M.G. Moharam, D.A. Pommet, E.B. Grann and T.K. Gaylord, "Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings : enhanced transmission matrix approach," *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**, 1077-1086 (1995).

- [28] L. Li, "Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings," *J. Opt. Soc. Am. A*, **13**, 1024-1035 (1996).
- [29] B.E.A. Saleh and M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (Wiley series in pure and applied optics, New York, 1991).